Том 24, № 128 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-376-383
УДК 517

О существовании непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

On the existence of a continuously differentiable solution to the Cauchy problem for implicit differential equations

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA, Sergey E. ZHUKOVSKIY

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Аннотация. Исследуется вопрос о существовании решения задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции. Рассматриваются дифференциальные уравнения, порожденные дважды непрерывно дифференцируемыми отображениями. Приведен пример, показывающий, что предположения регулярности отображения в каждой точке определения недостаточно для разрешимости задачи Коши. Введено понятие равномерной регулярности рассматриваемых отображений. Показано, что предположение равномерной регулярности является достаточным для локальной разрешимости задачи Коши при любых начальных данных в классе непрерывно дифференцируемых функций. Показано, что если отображение, определяющее дифференциальное уравнение, мажорируется отображениями специального вида, то решение рассматриваемой задачи Коши продолжаемо на заданный интервал времени. Рассмотрен случай липшицевой зависимости от фазовой переменной отображения, определяющего уравнение. Для этого случая найдены оценки непродолжаемых решений задачи Коши. Проведено сравнение полученных результатов с известными ранее. Показано, что в предположениях доказанной теоремы существования решения единственность решения для рассматриваемых задач не характерна. Приведен пример, иллюстрирующий существенность предположения равномерной невырожденности для утверждения о существовании локального решения и для утверждения о продолжении решения на заданный интервал времени.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение; теорема существования

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00080_а, № 20-31-70013_Стабильность) и Volkswagen Foundation.

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* О существовании непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для неявного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 376–383. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-376-383.

Abstract. We study the question of the existence of a solution to the Cauchy problem for a differential equation unsolved with respect to the derivative of the unknown function.

Differential equations generated by twice continuously differentiable mappings are considered. We give an example showing that the assumption of regularity of the mapping at each point of the domain is not enough for the solvability of the Cauchy problem. The concept of uniform regularity for the considered mappings is introduced. It is shown that the assumption of uniform regularity is sufficient for the local solvability of the Cauchy problem for any initial point in the class of continuously differentiable functions. It is shown that if the mapping defining the differential equation is majorized by mappings of a special form, then the solution of the Cauchy problem under consideration can be extended to a given time interval. The case of the Lipschitz dependence of the mapping defining the equation on the phase variable is considered. For this case, estimates of non-extendable solutions of the Cauchy problem are found. The results are compared with known ones. It is shown that under the assumptions of the proved existence theorem, the uniqueness of a solution may fail to hold. We provide examples llustrating the importance of the assumption of uniform regularity.

Keywords: implicit ordinary differential equation; existence theorem

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (prijects no. 19-01-00080_a, no. 20-31-70013_Стабильность) and Volkswagen Foundation.

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. O suschestvovanii neprerivno differentsiruyemogo resheniya zadachi Koshi dlya neyavnogo differentsialnogo uravneniya [On the existence of a continuously differentiable solution to the Cauchy problem for implicit differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 376–383. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-376-383. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши

$$f(t,x,\dot{x})=0, \quad x(t_0)=x_0, \quad t\in I. \tag{1.1}$$

Здесь I — заданный открытый интервал, $f:I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ — заданное непрерывное отображение, относительно которого всюду далее будем предполагать, что отображение $f(t,x,\cdot)$ дважды дифференцируемо при всех $(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n$, а отображения $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}$ непрерывны; $x_0\in\mathbb{R}^n$ — заданный вектор; $t_0\in I$ — заданное число; решение $x(\cdot)$ задачи (1.1) ищется в классе непрерывно дифференцируемых функций, определенных на некотором интервале времени, лежащем в I и содержащем t_0.

Дифференциальное уравнение в (1.1) принято называть неявным или не разрешенным относительно производной неизвестной функции. Уравнения такого типа изучались во многих работах. Наиболее близкими к настоящему исследованию результаты были получены в работах [1, 2]. В них были получены утверждения о существовании и устойчивости решений неявных дифференциальных уравнений в классе абсолютно непрерывных функций. В частности, было доказано, что в предположении накрываемости отображения f по переменной $\dot{x}$ и липшицевости по x существует абсолютно непрерывное решение задачи (1.1). В настоящей работе исследован вопрос о существовании непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши (1.1) при дополнительном предположении гладкости f по $\dot{x}$, и при более слабом предположении — предположении непрерывности отображения f по переменной x.

Заметим, что если для некоторого набора $(t_0, x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ для отображения f выполняется условие регулярности по переменной $\dot{x}$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_0, x_0, u_0)\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k, \tag{1.2}$$

и $f(t_0, x_0, u_0) = 0$, то по теореме о неявной функции существует непрерывное отображение $g : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $f(t, x, g(t, x)) = 0$ при всех (t, x) из некоторой окрестности точки (t_0, x_0), и $u_0 = g(t_0, x_0)$. Поэтому задача

$$\dot{x} = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет решение $\varphi(\cdot)$, удовлетворяющее соотношению $\dot{\varphi}(t_0) = u_0$. Очевидно, что $\varphi(\cdot)$ является решением задачи (1.1).

Отметим, что если предположение (1.2) выполняется при всех $(t_0, x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то задача (1.1) может не иметь решений при некоторых $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, поскольку в этом случае равенство $f(t_0, x_0, u_0) = 0$ может не достигаться ни в какой точке (t_0, x_0, u_0). Простой пример сказанному дает задача

$$e^{\dot{x}} = 0, \quad x(0) = 0.$$

Очевидно, что данная задача не имеет решений, хотя свойство (1.2) в ней выполняется при любых (t_0, x_0, u_0). Таким образом, для того, чтобы задача Коши (1.1) имела решение при любом $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, регулярности отображения f в каждой точке области определения не достаточно. В этой работе мы приведем достаточные условия существования решения задачи Коши (1.1) при любых начальных данных и достаточные условия продолжения решения на заданный интервал времени.

2. Предварительные сведения

Прежде чем перейти к основному результату, напомним некоторые определения и утверждения.

Всюду далее через $|\cdot|$ будем обозначать норму в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$, через $\|\cdot\|$ — норму в пространстве $\mathcal{L}_{n,k}$ линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, через $B_n(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x радиуса r, через $\mathcal{SL}_{n,k}$ — множество всех сюръективных операторов $A \in \mathcal{L}_{n,k}$.

Оператор $A \in \mathcal{L}_{n,k}$ называется α-накрывающим (накрывающим с константой $\alpha > 0$), если

$$B_k(0, \alpha r) \subset A B_n(0, r) \quad \forall\, r \geq 0.$$

Отметим, что приведенное определение накрываемости для линейных операторов является частным случаем понятия накрываемости нелинейных отображений метрических пространств (см., например, [1, 2]).

Очевидно, что линейный оператор сюръективен тогда и только тогда, когда он является α-накрывающим при некотором $\alpha > 0$. Известно (см, например, [3]), что для произвольного $A \in \mathcal{SL}_{n,k}$ наибольшая константа накрывания $\bar{\alpha}$ оператора A определяется по формуле

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\|A^*(AA^*)\|}.$$

Приведем теперь глобальную теорему о неявной функции из [3, теорема 3].

Пусть Σ — топологическое пространство, $F:\mathbb{R}^n\times\Sigma\to\mathbb{R}^k$ — заданное отображение, относительно которого будем предполагать, что оно непрерывно, отображение $F(\cdot,\sigma)$ дважды непрерывно дифференцируемо при всех $\sigma\in\Sigma$, отображения $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ непрерывны по совокупности аргументов (x,σ).

П р е д л о ж е н и е 2.1. *(следствие из [3, теорема 3]). Пусть задано* $\alpha>0$. *Предположим, что линейный оператор* $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\sigma)$ *является* α*-накрывающим при всех* $(x,\sigma)\in\mathbb{R}^n\times\Sigma$.

Тогда существует непрерывное отображение $G:\mathbb{R}^n\times\Sigma\to\mathbb{R}^n$ *такое, что*

$$F(G(x,\sigma),\sigma)=0\quad\forall\,(x,\sigma)\in\mathbb{R}^n\times\Sigma,$$

$$|G(x,\sigma)-x|\le\frac{|F(x,\sigma)|}{\alpha}\quad\forall\,(x,\sigma)\in\mathbb{R}^n\times\Sigma.$$

3. Основной результат

Вернемся к задаче Коши (1.1). Сформулируем достаточные условия ее разрешимости при любых начальных данных и условия существования решения на заданном интервале времени.

Пусть задано вещественное число $\alpha>0$.

Теорема 3.1. *Предположим, что для отображения* f *выполняется предположение равномерной регулярности по переменной* $\dot{x}$, *то есть линейный оператор* $\dfrac{\partial f}{\partial\dot{x}}(t,x,\dot{x})$ *является* α*-накрывающим при всех* $(t,x,\dot{x})\in I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

1. *Тогда для любого* $(t_0,x_0)\in I\times\mathbb{R}^n$ *и для любой непрерывной функции* $u_0:I\to\mathbb{R}^n$ *существует содержащий* t_0 *интервал* $J\subset I$ *и решение* $\varphi:J\to\mathbb{R}^n$ *задачи Коши* (1.1) *такое, что*

$$|\dot{\varphi}(t)-u_0(t)|\le\frac{|f(t,\varphi(t),u_0(t))|}{\alpha}\quad\forall\,t\in J.\tag{3.1}$$

2. *Предположим дополнительно, что существуют непрерывные функции* $a\colon I\to\mathbb{R}_+$ *и* $b:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ *такие, что*

$$|f(t,x,\dot{x})|\le a(t)|x|+b(t,\dot{x})\quad\forall\,(t,x,\dot{x})\in I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.\tag{3.2}$$

Тогда для любого $(t_0,x_0)\in I\times\mathbb{R}^n$, *для любой непрерывной функции* $u_0:I\to\mathbb{R}^n$ *существует решение* $\varphi:I\to\mathbb{R}^n$ *задачи Коши* (1.1), *для которого выполняется* (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. **1.** Применяя предложение 2.1 с $\Sigma=I\times\mathbb{R}^n$ и $\sigma=(t,x)$, получаем, что существует непрерывное отображение $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ такое, что

$$f(t,x,g(u,t,x))=0\quad\forall\,(t,x,u)\in I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\tag{3.3}$$

$$|g(u,t,x)-u|\le\frac{|f(t,x,u)|}{\alpha}\quad\forall\,(t,x,u)\in I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.\tag{3.4}$$

Возьмем произвольную точку $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ и функцию $u_0 : I \to \mathbb{R}^n$ и рассмотрим задачу Коши
$$\dot{x} = g(u_0(t), t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.5}$$
Поскольку функции g и u_0 непрерывны, то правая часть дифференциального уравнения в (3.5) непрерывна, и, значит, задача Коши (3.5) имеет решение $\varphi(\cdot)$, определенное на некотором интервале J (см., например, [4, глава II, теорема 2.1]).

Покажем, что функция φ является искомой. Для произвольного $t \in J$ имеем
$$f\big(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)\big) = f\big(t, \varphi(t), g(u(t), t, \varphi(t))\big) = 0.$$
Здесь первое равенство следует из того, что функция φ является решением задачи Коши (3.5), а второе — из соотношения (3.3). Кроме того,
$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| = |g(u_0(t), t, \varphi(t)) - u_0(t)| \le \frac{|f(t, \varphi(t), u_0(t))|}{\alpha}.$$
Здесь равенство следует из того, что функция φ является решением задачи Коши (3.5), а неравенство — из соотношения (3.4). Таким образом, функция $\varphi(\cdot)$ является искомой.

2. Применяя предложение 2.1 с $\Sigma = I \times \mathbb{R}^n$ и $\sigma = (t, x)$, получаем, что существует непрерывное отображение $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ такое, что выполняются соотношения (3.3) и (3.4).

Возьмем произвольную точку $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ и функцию $u_0 : I \to \mathbb{R}^n$ и рассмотрим задачу Коши (3.5). Поскольку функции g и u_0 непрерывны, то правая часть дифференциального уравнения в (3.5) непрерывна. Кроме того,
$$|g(u_0(t), t, x)| = |g(u_0(t), t, x) - u_0(t) + u_0(t)| \le |g(u_0(t), t, x) - u_0(t)| + |u_0(t)| \le$$
$$\le \frac{|f(t, x, u_0(t)|)}{\alpha} + |u_0(t)| \le \frac{a(t)}{\alpha}|x| + \frac{b(t, u_0(t))}{\alpha} + |u_0(t)|$$
для любого $t \in I$. Здесь первое неравенство вытекает из неравенства треугольника, второе — из соотношения (3.4), а третье — из предположения (3.2). Таким образом, для задачи (3.5) выполнены предположения теоремы о продолжении решения на заданный интервал (см., например [5, глава II, теорема 5]). Значит, задача Коши (3.5) имеет решение $\varphi(\cdot)$, определенное на всем интервале I. Дословно повторив соответствующие рассуждения из пункта **1** доказательства, получаем, что функция φ является искомой. □

4. Обсуждение основных результатов

Прокомментируем теорему 3.1. Применительно к задаче Коши для явного дифференциального уравнения, т. е. к задаче
$$\dot{x} = h(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$
в которой $h : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — заданная непрерывная функция, а $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ — заданное начальное условие, теорема 3.1 не дает новых результатов. В этом случае

$f(t,x,\dot{x}) \equiv \dot{x} - h(t,x)$, $\alpha = 1$, и, значит, теорема 3.1 совпадает с известными утверждениями о существовании решения и его продолжении на заданный интервал времени (см., например, [4,5]). При этом оценка (3.1) принимает вид

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| \le |h(t,\varphi(t)) - u_0(t)| \quad \forall\, t \in J.$$

Но это неравенство очевидно, поскольку $\dot{\varphi}(t) \equiv h(t,\varphi(t))$. Таким образом, теорема 3.1 не дает новых результатов для явных дифференциальных уравнений.

Отметим теперь, что в предположениях теоремы 3.1 решение может быть не единственным. Во-первых, это связано с тем, что отображение f непрерывно по переменной x, но не обязательно локально липшицево. Во-вторых, в предположениях теоремы возможна ситуация $k < n$, при которой, очевидно, единственность решения невозможна. Однако, если $k = n$, а отображение f достаточно гладко, то можно доказать единственность решения.

Приведенный в параграфе 1 пример показывает, что предположение равномерной регулярности в теореме 3.1 существенно для утверждения п. **1** о существовании решения. Покажем, что даже если имеет место условие (3.2), то условие равномерной регулярности существенно и для утверждения п. **2** о существовании решения на заданном интервале времени, и не может быть заменено, например, предположением регулярности f по переменной $\dot{x}$ в каждой точке области определения отображения f.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим задачу Коши (1.1), в которой $I = \mathbb{R}$, а отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ определено по формуле

$$f(t,x,\dot{x}) := \begin{pmatrix} e^{\dot{x}_1}\cos(\dot{x}_2) \\ e^{\dot{x}_1}\sin(\dot{x}_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для этого отображения соотношение (1.2) выполняется при любом $(t_0, x_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (см., например, [6, §5.3]).

Покажем, что в рассматриваемой задаче выполняется предположение (3.2). Действительно, для любых $(t,x,\dot{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ имеем

$$|f(t,x,\dot{x})| = \left| \begin{pmatrix} e^{\dot{x}_1}\cos(\dot{x}_2) \\ e^{\dot{x}_1}\sin(\dot{x}_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right| \le |t| + e^{\dot{x}_1} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Значит предположение (3.2) выполняется с $I = \mathbb{R}$. Однако любое решение задачи Коши (1.1) не определено в точке $t = 0$, поскольку $f(0,x,\dot{x}) \ne 0$ ни при каких $x, \dot{x} \in \mathbb{R}^2$.

В заключение рассмотрим случай, когда отображение f липшицево по переменной x. Пусть $\beta \ge 0$ задано.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Предположим, что отображение* $f(t,\cdot,\dot{x})$ *липшицево с константой Липшица* β *при любых* $(t,\dot{x}) \in I \times \mathbb{R}^n$. *Пусть* $(t_0,x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ *— заданная точка,* $u_0 : I \to \mathbb{R}^n$ *— заданная непрерывная функция,*

$$\Phi[u_0](t) := f\left(t, x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} u_0(s)\, ds, u_0(t)\right), \quad t \in I,$$

$J \subset I$ — *заданный интервал, содержащий* t_0, $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ — *решение задачи Коши* (1.1), *удовлетворяющее неравенству* (3.1).

Тогда

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| \leq \frac{\beta}{\alpha^2}\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}(t-s)}|\Phi[u_0](s)|\,ds\right| + \frac{|\Phi[u_0](t)|}{\alpha} \quad \forall\, t \in J.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.1) и липшицевости отображения f по второму аргументу имеем

$$\begin{aligned}\alpha|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| &\leq |f(t,\varphi(t),u_0(t))| \leq |f(t,\varphi(t),u_0(t)) - \Phi[u_0](t)| + |\Phi[u_0](t)| \leq \\ &\leq \beta\left|\int\limits_{t_0}^{t}(\dot{\varphi}(s) - u_0(s))\,ds\right| + |\Phi[u_0](t)| \leq \beta\int\limits_{t_0}^{t}|\dot{\varphi}(s) - u_0(s)|\,ds + |\Phi[u_0](t)|\end{aligned} \tag{4.1}$$

для любого $t \in J$, $t \geq t_0$. Умножая это неравенство на $\alpha^{-1}e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-t_0)}$ получаем, что

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t}|\dot{\varphi}(s) - u_0(s)|\,ds\right) \leq \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-t_0)}}{\alpha}|\Phi[u_0](t)|$$

при любом $t \in J$, $t \geq t_0$. Значит,

$$\int\limits_{t_0}^{t}|\dot{\varphi}(s) - u_0(s)|\,ds \leq \frac{1}{\alpha}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}(t-s)}|\Phi[u_0](s)|\,ds$$

при любом $t \in J$, $t \geq t_0$. Отсюда и из (4.1) следует, что

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| \leq \frac{\beta}{\alpha^2}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}(t-s)}|\Phi[u_0](s)|\,ds + \frac{|\Phi[u_0](t)|}{\alpha}$$

для любого $t \in J$, $t \geq t_0$. Повторив аналогичные рассуждения для $t \in J$, $t < t_0$, получаем искомую оценку.

References

[1] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[2] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy,, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[3] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции”, *Дифференциальные уравнения*, **55**:4 (2019), 452–463; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Application of methods of ordinary differential equations to global inverse function theorems”, *Differential Equations*, **55**:4 (2019), 437–448.

[4] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; англ. пер.:P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1970.

[5] А. Ф. Филиппов, *Введение в теорию дифференциальных уравнений*, КомКнига, М., 2007. [A. F. Filippov, *Introduction to the Theory of Differential Equations*, KomKniga, Moscow, 2007 (in Russian)].

[6] Дж. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М, 1975; англ. пер.:J. Ortega, W. Rheiboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковский Сергей Евгеньевич
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 12 сентября 2019 г.
Поступила после рецензирования 18 ноября 2019 г.
Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergey E. Zhukovskiy
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Received 12 September 2019
Reviewed 18 November 2019
Accepted for press 29 November 2019